1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte F, G und H.

1.4 Zeigen Sie, dass sich die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{CE}$ des Spats schneiden und ermitteln Sie den Schnittpunkt. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt die Diagonalen ?

1.5 Berechnen Sie den Abstand, den die Ebene, in der das Rechteck ABCD liegt, vom Koordinatenursprung hat.

1.6 Berechnen Sie das Volumen des Spats.

1.7 Der Eckpunkt B des Spats wird am Punkt P(2,5 | 4,5 | 2,5) gespiegelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3

1. In einer Lostrommel liegen 6 Tischtennisbälle, die mit den Buchstaben A, B, I, T, U, R beschriftet sind. Es wird dreimal nacheinander ein Ball gezogen und der Buchstabe notiert. In der Reihenfolge, in der sie notiert wurden, ergeben die Buchstaben "Wörter".
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
E_1: "Das Wort ABI entsteht."
E_2: "Das Wort hat drei gleiche Buchstaben."
für den Fall, dass

1.1 der gezogene Ball nach jeder Ziehung wieder zurückgelegt wird.

1.2 der gezogene Ball nach jeder Ziehung nicht zurückgelegt wird.

2. Erfahrungsgemäß sind 20 % der Eier einer Hühnerfarm von der Güteklasse A, die restlichen von der Güteklasse B.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Auswahl von fünf Eiern mindestens drei zur Güteklasse A gehören.

2.2 Wie viele Eier muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein Ei der Güteklasse A zu erhalten ?

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : D \to IR\ ;\ x \mapsto \frac{x^3}{2(x+k)^2}$, $k \in IR^*$.

1.1 Geben Sie die Definitionsmenge D in Abhängigkeit von k an und zeigen Sie, dass für alle $x \in D$ gilt: $f_k''(x) = \frac{3k^2 \cdot x}{(x+k)^4}$.

1.2 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle -6 einen Extrempunkt hat.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion f_2 .

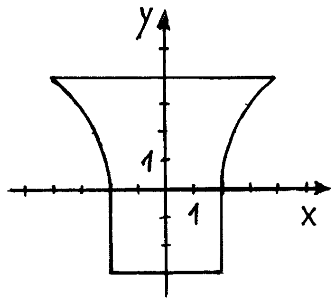
1.4.1 Ermitteln Sie für eine beliebige Funktion f_k der Schar den Extrempunkt und weisen Sie die Art des Extremums nach.

1.4.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der die Extrempunkte aller Funktionen der Schar liegen.

1.4.3 Zeigen Sie: Für jedes $k \in IR^*$ entsteht der Graph der Funktion f_{-k} aus dem Graphen der Funktion f_k durch Spiegelung am Koordinatenursprung.

1.5 Der Graph von f_2 und seine schiefe Asymptote schließen zwischen ihrer Schnittstelle und der Stelle 0 mit der y-Achse eine Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche im Koordinatensystem des Aufgabenteils 1.3 und berechnen Sie deren Inhalt.

2. In nebenstehender Abbildung ist der Querschnitt einer bzgl. der y -Achse rotationssymmetrischen Vase dargestellt.
Der im 1. Quadranten liegende rechte Rand wird durch eine Funktion mit der Gleichung
$g(x) = a\sqrt{x+b}$ $(a, b \in IR)$ beschrieben.



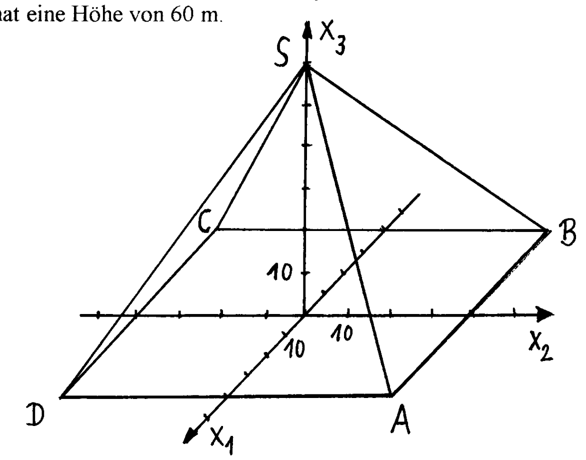
2.1 Ermitteln Sie die Parameter a und b so, dass man den dargestellten Graphen erhält.

2.2 Begründen Sie, dass mit Hilfe dieser Wurzelfunktion der Übergang zum zylinderförmigen Teil der Vase ohne Knick, wie es in der Abbildung dargestellt ist, beschrieben wird.

2.3 Berechnen Sie das Volumen der Vase für $a = 2\sqrt{2}$ und $b = -2$.

Aufgabe 2

1. Gegeben ist eine gerade Pyramide (siehe Zeichnung) mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenlänge des in der x_1 x_2 - Ebene liegenden Quadrates ABCD beträgt 80 m; die Pyramide hat eine Höhe von 60 m.



1.1 Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene e auf, in der die Seitenfläche ABS liegt.

1.2 Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene e : $3\,x_2 + 2\,x_3 - 120 = 0$ (Teil 1.1) mit der Pyramidenkante $\overline{DS}$ bildet.

1.3 Im angegebenen Koordinatensystem der Pyramide ist ein Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Der Schattenpunkt S' der Pyramidenspitze S liegt in der x_1 x_2 - Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von S'.

1.4 Wie weit ist der Punkt $S'(40 \mid 80 \mid 0)$ von den Eckpunkten A und B der Pyramide entfernt?

1.5 Begründen Sie:

Jeder Punkt der Pyramidenhöhe $\overline{OS}$ hat von den vier Seitenflächen der Pyramide den gleichen Abstand.

Bestimmen Sie den Punkt von $\overline{OS}$, der sowohl von den vier Seitenflächen als auch von der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat.

2. Zeigen Sie mit den Mitteln der Vektorrechnung:

In einem Trapez, in dem die eine Grundseite doppelt so lang ist wie die andere, teilen sich die Diagonalen im Verhältnis 2 : 1.

Hinweis: Die zueinander parallelen Seiten eines Trapezes heißen Grundseiten.

Aufgabe 3

1. An einem Badestrand werden 200 Strandkörbe vermietet. Von den Strandkörben sind 100 blau, 40 rot und 60 gelb. Familie Schmidt mietet sich morgens immer als Erste einen Strandkorb. Der Strandkorb wird zufällig ausgewählt.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Strandkorbfarbe an den ersten drei Tagen gleich ist.

1.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die an den ersten beiden Tagen gemieteten Strandkörbe unterschiedliche Farben haben?

1.3 Ermitteln Sie die Mindestzahl der Tage, an denen Familie Schmidt einen Strandkorb mieten muss, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal einen roten Strandkorb zu erhalten, größer als 95 % ist.

2. Bei der Herstellung von Boulekugeln treten Fehler in der Formgebung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % auf. Unabhängig davon sind einige Kugeln aus fehlerhaftem Material gefertigt. Nur 90 % der produzierten Kugeln sind völlig fehlerfrei.

2.1 Aus der Produktion wird zufällig eine Kugel ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A : „ Die Kugel hat einen Materialfehler."

B : „ Die Kugel hat genau einen der beiden Fehler."

2.2 Ein Warenhaus wird von zwei verschiedenen Herstellern beliefert. Die Lieferung von Hersteller 1 enthält 10 % fehlerhafte Kugeln, die von Hersteller 2 nur 9 % fehlerhafte Kugeln. Insgesamt stammt ein Drittel aller fehlerhaften Kugeln vom Hersteller 1. Welchen Anteil aller Kugeln bezieht das Warenhaus vom Hersteller 1 ?

2.3 Bei einem Gewinnspiel wird mit einer Boulekugel auf ein in einiger Entfernung liegendes „Schweinchen" geworfen. Man setzt 50 Cent ein und darf höchstens dreimal werfen. Sobald man trifft, ist das Spiel beendet. Bei jedem Wurf beträgt die Trefferquote 1/3. Trifft man beim ersten Mal, erhält man 1 Euro, trifft man beim zweiten Mal, erhält man noch 50 Cent. Trifft man das Schweinchen erst beim dritten Mal, so werden 10 Cent ausgezahlt.
Berechnen Sie den Verlust, mit dem man in einem Spiel rechnen muss.

Schriftliche Abiturprüfung 2003
Fach : Mathematik
Prüfungsart : 3. Prüfungsfach
Dauer : 3,5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

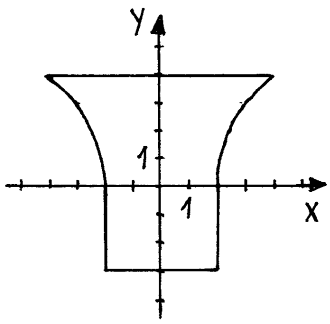
Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : D \to IR \; ; \; x \mapsto \dfrac{x^3}{2(x+k)^2}$, $k \in IR^*$.

1.1 Geben Sie die Definitionsmenge D in Abhängigkeit von k an und zeigen Sie, dass für alle $x \in D$ gilt: $f_k''(x) = \dfrac{3k^2 \cdot x}{(x+k)^4}$.

1.2 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle -6 einen Extrempunkt hat.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion f_2 .



2. In nebenstehender Abbildung ist der Querschnitt einer bzgl. der y-Achse rotationssymmetrischen Vase dargestellt.
Der im 1. Quadranten liegende rechte Rand wird durch eine Funktion mit der Gleichung
$g(x) = a\sqrt{x+b}$ $(a, b \in IR)$ beschrieben.

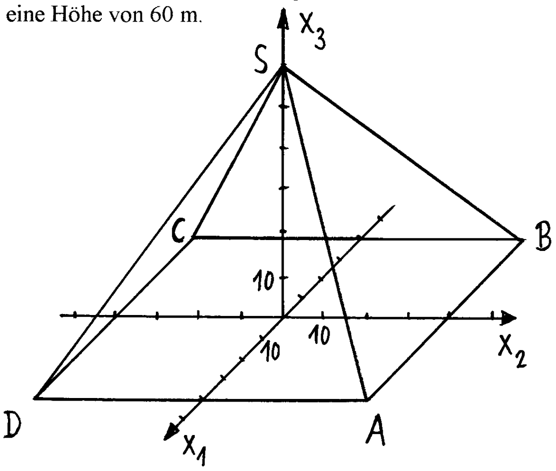
2.1 Ermitteln Sie die Parameter a und b so, dass man den dargestellten Graphen erhält.

2.2 Begründen Sie, dass mit Hilfe dieser Wurzelfunktion der Übergang zum zylinderförmigen Teil der Vase ohne Knick, wie es in der Abbildung dargestellt ist, beschrieben wird.

2.3 Berechnen Sie das Volumen der Vase für $a = 2\sqrt{2}$ und $b = -2$.

Aufgabe 2

1. Gegeben ist eine gerade Pyramide (siehe Zeichnung) mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenlänge des in der x_1 x_2 - Ebene liegenden Quadrates ABCD beträgt 80 m; die Pyramide hat eine Höhe von 60 m.



1.1 Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene e auf, in der die Seitenfläche ABS liegt.

1.2 Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene e : $3x_2 + 2x_3 - 120 = 0$ (Teil 1.1) mit der Pyramidenkante $\overline{DS}$ bildet.

1.3 Im angegebenen Koordinatensystem der Pyramide ist ein Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Der Schattenpunkt S' der Pyramidenspitze S liegt in der x_1 x_2 - Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von S'.

2. Zeigen Sie mit den Mitteln der Vektorrechnung:
In einem Trapez, in dem die eine Grundseite doppelt so lang ist wie die andere, teilen sich die Diagonalen im Verhältnis 2 : 1.
Hinweis: Die zueinander parallelen Seiten eines Trapezes heißen Grundseiten.

Aufgabe 3

1. An einem Badestrand werden 200 Strandkörbe vermietet. Von den Strandkörben sind 100 blau, 40 rot und 60 gelb. Familie Schmidt mietet sich morgens immer als Erste einen Strandkorb. Der Strandkorb wird zufällig ausgewählt.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Strandkorbfarbe an den ersten drei Tagen gleich ist.

1.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die an den ersten beiden Tagen gemieteten Strandkörbe unterschiedliche Farben haben?

1.3 Ermitteln Sie die Mindestzahl der Tage, an denen Familie Schmidt einen Strandkorb mieten muss, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal einen roten Strandkorb zu erhalten, größer als 95 % ist.

2. Bei der Herstellung von Boulekugeln treten Fehler in der Formgebung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % auf. Unabhängig davon sind einige Kugeln aus fehlerhaftem Material gefertigt. Nur 90 % der produzierten Kugeln sind völlig fehlerfrei.

   Aus der Produktion wird zufällig eine Kugel ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A : „Die Kugel hat einen Materialfehler."

   B : „Die Kugel hat genau einen der beiden Fehler."

Schriftliche Abiturprüfung 2003
Fach : Mathematik
Prüfungsart : 3. Prüfungsfach – Abendgymnasium
4. Prüfungsfach – Freie Waldorfschule
Dauer : 3,5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 2 Seiten !!!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : D \to IR \; ; \; x \mapsto \dfrac{2x^2 + kx}{3(x-1)}$, $k \in IR$.

1.1 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Asymptote die Gleichung $f_A(x) = \frac{2}{3}x + 2$ hat.

1.2 Diskutieren Sie die Funktion $f : D \to IR \; ; \; x \mapsto \dfrac{2x^2 + 4x}{3(x-1)}$.

Zur Kontrolle : $f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

1.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph von f (Teil 1.2) und der x - Achse eingeschlossen wird.

2. Gegeben ist eine Exponentialfunktion der Form $g : IR \to IR \; ; x \mapsto a \cdot e^{bx} \; (a, b \in IR^*)$.

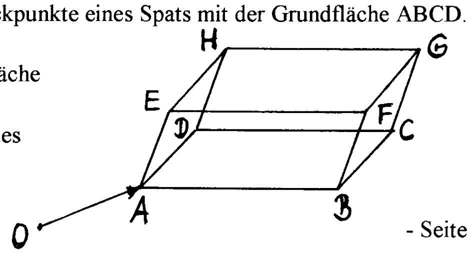
2.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Gerade mit $y = \frac{2}{3}x + 2$ Tangente an den Graph von g im Punkt $B(0 | g(0))$ ist.

2.2 Ermitteln Sie die Umkehrfunktion h der Funktion $g : IR \to IR \; ; x \mapsto 2 \cdot e^{\frac{1}{3}x}$ und zeichnen Sie die Graphen von g und h in dasselbe Koordinatensystem.

2.3 Die beiden Graphen der Funktionen g und h (Teil 2.2) kommen sich in den Punkten P und Q am nächsten. Berechnen Sie die Koordinaten von $P \in Graph\, g$ und $Q \in Graph\, h$ aus der Bedingung, dass in diesen Punkten die Tangenten parallel zur 1. Winkelhalbierenden sind.

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte A(2 | 1 | -1), B(6 | 4 | -2), C (5 | 6 | 0), D(1 | 3 | 1) und E (0 | 3 | 5). Diese Punkte sind Eckpunkte eines Spats mit der Grundfläche ABCD. (siehe Skizze)



1.1 Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABCD ein Rechteck ist.

1.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.