
Aufgabe 3:

1. Bekanntlich gefährdet Rauchen die Gesundheit. Deshalb möchten auch viele Raucher das Rauchen aufgeben. Laut einer Notiz des Magazins „Focus" vom August 2003 schaffen es aber nur 4,4% der Aufhörwilligen mehr als ein Jahr rauchfrei zu leben.

1.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 30 aufhörwilligen Rauchern genau 3 mehr als ein Jahr durchhalten ?

1.2 Wie viele aufhörwillige Raucher sind mindestens erforderlich, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einer dabei ist, dem es gelingt mehr als ein Jahr nicht zu rauchen?

2. Die schriftlichen Abiturprüfungen gehen zu Ende. Die 8 Schülerinnen und 8 Schüler eines Mathematik-Grundkurses beschließen, dieses mit einer Spritztour zu feiern. Zufälligerweise besitzen zwei Schülerinnen und zwei Schüler je einen Kleinwagen, so dass die 16 Personen in die vier Autos gleichmäßig verteilt werden können. Bevor die Fahrt beginnt, wird noch schnell ein Foto gemacht; dazu stellen sich alle in zwei Achterreihen hintereinander.

2.1 Wie viele Möglichkeiten der Anordnung für das Foto gibt es ?

2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen auf dem Foto alle Frauen vorn und alle Männer hinten?

2.3 Nun begeben sich alle zu den Autos um die Fahrt zu beginnen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Autos zufällig zu besetzen, wenn die Sitzordnung keine Rolle spielt und der Fahrer bzw. die Fahrerin im eigenen Wagen ist ?

2.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in zwei Wagen nur Frauen und in zweien nur Männer sind, wenn die Sitzordnung keine Rolle spielt und der Fahrer bzw. die Fahrerin im eigenen Wagen ist ?

Schriftliche Abiturprüfung 2004
Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner
!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : D_{max} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(\frac{k \cdot x}{k - x})$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{max} in Abhängigkeit von k und zeigen Sie, dass für alle $x \in D_{max}$ gilt : $f_k''(x) = \frac{k \cdot (2x-k)}{x^2 \cdot (k-x)^2}$.

1.2 Zeigen Sie, dass je zwei verschiedene Scharkurven keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

1.3 Berechnen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Graphen der Schar f_k liegen.

1.4 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente hat, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden verläuft.

1.5 Diskutieren Sie die Funktion f_4.

1.6 Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0; 2[$ gilt: $f_4(2+x) + f_4(2-x) = 2 \cdot f_4(2)$.
Welche geometrische Bedeutung hat diese Gleichung für den Graphen der Funktion f_4?

1.7 Begründen Sie, dass die Funktion f_4 umkehrbar ist. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion an und berechnen Sie ihre Funktionsgleichung.

1.8 Der Graph der Funktion f_4, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x =3 schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

2. Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ und ein Punkt $P(u \mid g(u))$ mit $u > 1$ auf dem Graphen der Funktion g. Die Normale an den Graphen der Funktion g im Punkt P, die Gerade mit der Gleichung x = u und die x-Achse schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner
!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte A(4| 2| 5), B(6|0|6) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e, die den Punkt A und die Gerade g enthält und weisen Sie nach, dass auch der Punkt B in dieser Ebene liegt.

1.2 Auf der Geraden g gibt es einen Punkt C so, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ senkrecht aufeinander stehen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.
[Zur Kontrolle: C(7 |2 |8)]

1.3 Ergänzen Sie das rechtwinklige Dreieck ΔABC durch Berechnung des Punktes D zum Rechteck ABCD und zeigen Sie dann, dass dieses Rechteck sogar ein Quadrat ist.

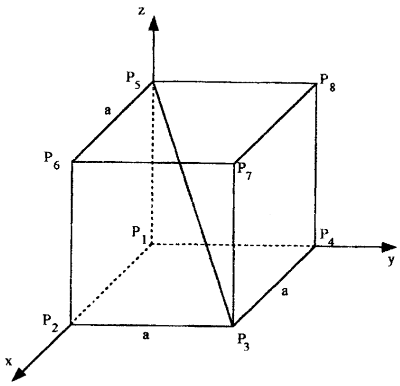
1.4 Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide, deren Spitze S in der x-z-Ebene liegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze S und das Volumen der Pyramide ABCDS.
[Zur Kontrolle : S(1,5| 0| 10,5)]

1.5 Es gibt eine Kugel, die durch alle Eckpunkte der Pyramide ABCDS geht. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M dieser Kugel.

2. Ein Würfel mit der Kantenlänge a ist gemäß folgender Abbildung in einem kartesischen Koordinatensystem positioniert.

2.1 Berechnen Sie das Maß des Winkels zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels.

2.2 Zeigen Sie: Der Abstand der Würfelecke P_2 von der Raumdiagonalen $\overline{P_5P_3}$ beträgt $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$.



Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 3

1. Die Anzeige eines Glücksspielautomaten besteht aus neun Leuchtfeldern, die gemäß folgender Abbildung mit den Ziffern 1 bis 9 beschriftet sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Nach Einwerfen des Spieleinsatzes leuchten zufällig genau vier Felder auf.
Alle Kombinationen sind gleich wahrscheinlich.
Die leuchtenden Ziffern ergeben von links nach rechts gelesen eine vierstellige Zahl.

1.1 Wie viele dieser vierstelligen Zahlen kann der Automat erzeugen?

1.2 Wie viele dieser Zahlen haben die Endziffer 7 ?

1.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Automat eine gerade Zahl erzeugt.
[Zur Kontrolle: $p = \frac{46}{126}$]

1.4 Der Automat wirft am Ende eines jeden Spiels so viele Euro aus, wie die Endziffer der leuchtenden Zahl angibt.
Wie viele Euro muss der Spieleinsatz betragen, damit das Spiel fair ist?

1.5 An dem Automaten wird nun dreimal hintereinander gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der dabei auftretenden 3 Zahlen gerade ist?

2. Eine Zulieferfirma der Landmaschinenindustrie fertigt Hydraulikventile für Traktoren.
Bei der Herstellung der Ventile können erfahrungsgemäß zwei Fehler auftreten.
Fehler 1 tritt bei 4% und Fehler 2 bei 2% der Ventile auf.
Beide Fehler zusammen treten bei 1 % der Ventile auf.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:
A: „Bei einem Ventil tritt mindestens ein Fehler auf."
B: „Bei einem Ventil tritt genau ein Fehler auf."

2.2 Ein der Produktion entnommenes Ventil weist den Fehler 1 auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Ventil auch der Fehler 2 vorliegt.
Untersuchen Sie, ob die beiden Fehler unabhängig voneinander auftreten.

2.3 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig der Produktion entnommenes Ventil fehlerhaft ist, beträgt 5 %.
Beim Versand werden 40 Ventile zu einer Verpackungseinheit zusammengefasst.

2.3.1 Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl defekter Ventile in einer Verpackungseinheit?

2.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Ventil einer Verpackungseinheit defekt ist.

Schriftliche Abiturprüfung 2004
Fach : Mathematik
Prüfungsart : 3. Prüfungsfach
Dauer : 3,5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : D_{max} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(\frac{k \cdot x}{k - x})$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{max} in Abhängigkeit von k und zeigen Sie, dass für alle $x \in D_{max}$ gilt : $f_k''(x) = \frac{k \cdot (2x - k)}{x^2 \cdot (k - x)^2}$.

1.2 Berechnen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Graphen der Schar f_k liegen.

1.3 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente hat, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden verläuft.

1.4 Diskutieren Sie die Funktion f_4 .

2. Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ und ein Punkt $P(u \mid g(u))$ mit $u > 1$ auf dem Graphen der Funktion g. Die Normale an den Graphen der Funktion g im Punkt P, die Gerade mit der Gleichung $x = u$ und die x-Achse schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte A(4| 2| 5), B(6|0|6) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e, die den Punkt A und die Gerade g enthält und weisen Sie nach, dass auch der Punkt B in dieser Ebene liegt.

1.2 Auf der Geraden g gibt es einen Punkt C so, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ senkrecht aufeinander stehen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.
[Zur Kontrolle: C(7 |2 |8)]

1.3 Ergänzen Sie das rechtwinklige Dreieck ΔABC durch Berechnung des Punktes D zum Rechteck ABCD und zeigen Sie dann, dass dieses Rechteck sogar ein Quadrat ist.

1.4 Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide, deren Spitze S in der x-z-Ebene liegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze S und das Volumen der Pyramide ABCDS.
[Zur Kontrolle : S(1,5| 0| 10,5)]

1.5 Es gibt eine Kugel, die durch alle Eckpunkte der Pyramide ABCDS geht.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M dieser Kugel.

Aufgabe 3

1. Die Anzeige eines Glücksspielautomaten besteht aus neun Leuchtfeldern, die gemäß folgender Abbildung mit den Ziffern 1 bis 9 beschriftet sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Nach Einwerfen des Spieleinsatzes leuchten zufällig genau vier Felder auf.
Alle Kombinationen sind gleich wahrscheinlich.
Die leuchtenden Ziffern ergeben von links nach rechts gelesen eine vierstellige Zahl.

1.1 Wie viele dieser vierstelligen Zahlen kann der Automat erzeugen?

1.2 Wie viele dieser Zahlen haben die Endziffer 7 ?

1.3 Zeigen Sie:
Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Automat eine gerade Zahl anzeigt, beträgt $\frac{46}{126}$.

1.4 Der Automat wirft am Ende eines jeden Spiels so viele Euro aus, wie die Endziffer der leuchtenden Zahl angibt.
Wie viele Euro muss der Spieleinsatz betragen, damit das Spiel fair ist?

2. Eine Zulieferfirma der Landmaschinenindustrie fertigt Hydraulikventile für Traktoren.
Bei der Herstellung der Ventile können erfahrungsgemäß zwei Fehler auftreten.
Fehler 1 tritt bei 4% und Fehler 2 bei 2% der Ventile auf.
Beide Fehler zusammen treten bei 1 % der Ventile auf.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:
A: „Bei einem Ventil tritt mindestens ein Fehler auf."
B: „Bei einem Ventil tritt genau ein Fehler auf."

2.2 Ein der Produktion entnommenes Ventil weist den Fehler 1 auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Ventil auch der Fehler 2 vorliegt.
Untersuchen Sie, ob die beiden Fehler unabhängig voneinander auftreten.

Schriftliche Abiturprüfung 2004
Fach: Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach – Abendgymnasium
4. Prüfungsfach – Freie Waldorfschule
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 1:

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D \to \mathbb{R}, x \mapsto -2 \cdot (x-a) \cdot e^{-(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge D an und bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Extrempunkt auf der y-Achse liegt.

1.2 Diskutieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2 \cdot (x+1) \cdot e^{-x-1}$.

1.3 Die Funktion f aus 1.2 besitzt eine Stammfunktion F mit der Funktionsgleichung $F(x) = (bx + c) \cdot e^{-x-1}$ wobei $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie b und c .

1.4 Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt P(3 | 0) an den Graphen der Funktion f .

2. Gegeben ist nun die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot e^{-x-1}$.

2.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ der Graphen von f und g und zeichnen Sie den Graphen von g (zu dem bereits vorhandenen Graphen von f) in das Koordinatensystem von 1.2 .

2.2 Die Punkte A(z | g(z)) und B(z | f(z)) sind Punkte auf dem Graphen von g bzw. von f, wobei $z \geq x_s$. Bestimmen Sie z so, dass die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal ist.

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach – Abendgymnasium
4. Prüfungsfach – Freie Waldorfschule
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

---

Aufgabe 2:

1. Gegeben sind die Punkte A(2|-3|2) , B(5|-5|0) , C(-1|3|6) und D(4|-4|9) sowie die Geradenschar $g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}-a\\5\\-9\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2a\\a-8\\7a-2\end{pmatrix}$.

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e, die die Punkte A, B und C enthält.

1.2 Bestimmen Sie aus der Geradenschar g_a die Gerade, die senkrecht auf der Ebene e: $2x_1-3x_2+6x_3-25=0$ steht.

1.3 Zeigen Sie, dass die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-9\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$ die Lotgerade durch den Punkt D auf die Ebene e ist.

1.4 Zeigen Sie: Der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene e ist zugleich der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$.

1.5 Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes D* von D bezüglich der Ebene e.
[Zur Kontrolle: D*(0|2|-3)]

1.6 Begründen Sie, dass das Viereck CDBD* eine Raute ist und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Raute.